Marches Aléatoires version 1.1

3 janvier 2017

1 Suites récurrentes aléatoires discrètes

Dans tout ce qui suit, on se donne deux espaces dénombrables E et F, une application $f : E \times F \to E, (x, y) \to f(x, y)$, une suite de VA $U_n : \Omega \to F$ de variables aléatoires indépendantes et indentiquement distribuées. Les variables aléatoires X_n, définies par la donnée de $X_0 : \Omega \to F$ indépendant des U_n et la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$$

forment une suite récurrente aléatoire.

1.1

a) Vérifier que U_{n+1} est indépendante de $X_0, \ldots, X_n$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout choix de $i_0, \ldots, i_n, i$ dans E,

$$P(X_{n+1} = i \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = S = P(X_{n+1} = i \mid X_n = i_n)$$

où $S = \sum_{f(i_n,j)=i} P(U_{n+1} = j)$.

Cette dernière propriété est appelée *propriété de Markov.* On note désormais $Q(i, j) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ la probabilité de transition de l'état i à l'état j, qui ne dépend pas de n (pourquoi ?).

1.2

Déterminer $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)$ en fonction de la loi de X_0 et des probabilités de transition, puis donner $P(X_0 = i_0 \, et \, X_n = i_n)$.

1.3 Etude d'un exemple

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, X_0 une VA à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $U_n : \Omega \to \mathbb{Z}^d$ une suite de variables aléatoires IID de loi q, indépendantes de X_0 ; on définit la suite X_n (position d'une particule effectuant une marche au hasard) par la donnée de X_0 et la relation

$$X_{n+1} = X_n + U_{n+1}.$$

Déterminer les probabilités de transition attachées à cette situation.

2 Marches aléatoires sur Z et Z^2

2.1 Retour à 0

Soit U_n une suite de VA de Bernoulli indépendantes, définies par
$P(U_n = 1) = p$, $P(U_n = -1) = 1 - p$ avec $0 < p < 1/2$.
On considère la marche aléatoire $X_0 = 0$, $X_n = X_0 + U_1 + \cdots + U_n$. L'évènement $A_n = (X_n = 0)$ est un *retour à* 0.
a) Que représente l'évènement $A = \limsup A_n$?
b) Calculer les $P(A_n)$. Montrer que $P(A) = 0$.

On suppose dans la suite de cette partie que $X_0 = 0$ p.s., et que les U_n prennent leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$, avec équiprobabilité. p_n désigne alors $P(X_n = 0)$.

2.2 Le cas de Z

Ici, $d = 1$. On introduit la VA (justifier) à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$:

$$T_0 = \inf\{n \geq 1;\ X_n = 0\}.$$

a) En utilisant le principe de réflexion, montrer que, pour tout $n \geq 1$

$$P(T_0 = 2n) = \frac{1}{2^{2n-1}}(C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-2}^{n-2}).$$

b) Comparer $P(X_{2n-2} = 0) - P(X_{2n} = 0)$ et $P(T_0 = 2n)$.

c) Prouver que $P(T_0 < +\infty) = 1$.

d) Montrer que la suite X_n retourne p.s. une infinité de fois à 0.

2.3 Le cas où $d = 2$

Les notations sont celles qui précèdent et $d = 2$, On suppose dans la suite de cette partie que $X_0 = 0$ p.s., et que $U_1 = (1, 0), U_2 = (-1, 0), U_3 = (0, 1), U_4 = (0, -1)$.
a) Montrer que que le nombre de chemins de longueur $2n$ qui retournent à l'origine est

$$\binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

puis prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = +\infty$.

b) On note q_n la probabilité de *premier* retour de X_n en $(0, 0)$, c'est-à-dire $P(T_0 = n)$, on pose $q_0 = 0$.

i) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \sum_{k=1}^{n} q_k p_{n-k}$.

ii) Comparer les fonctions génératrices f et g de p_n et q_n respectivement et en déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} q_k = 1$.

2.4 Passage de z à w

Soit $(z, w) \in (\mathbf{Z}^2)^2$. On note $X_{n,z}$ la suite de VA définie par la donnée de $X_0 = z$ et la relation $X_{n+1,z} = X_{n,z} + U_n$, et pour $n \geq 1$, $p_n(z, w)$ la probabilité de $(X_{n,z} = w)$, $q_n(z, w)$ celle de

$$(X_{n,z} = w \text{ et } X_{k,z} \neq w \,\text{si}\, 1 \leq k < n)$$

(première fois où $X_{n,z}$ passe par w au temps n, avec $q_0(z, w) = 0$).

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{Z}^2$,

$$p_n(z, w) = p_n(z + x, w + x) \, et \, q_n(z, w) = q_n(z + x, w + x)$$

$q_1(z, w) = p_1(0, w - z)$; $q_n(z, w) = q_n(0, w - z)$; $\sum_{k=1}^{n} q_k(z, w) \leq 1$;

$$p_n(z, w) = \sum_{k=1}^{n} q_k(z, w) p_{n-k}(0, 0)$$

En déduire que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(z, w) = +\infty$.

b) On pose $G_n(z, w) = \sum_{k=0}^{n} p_n(z, w)$ et $F(z, w) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(z, w)$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{G_n(z, w)}{G_n(0, 0)} = F(z, w)$$

$$\sum_{w \in \mathbf{Z}^2} p_n(z, w) F(w, y) = F(z, y)$$

en commençant par $n = 1$, et en déduire :

$$F(z, 0) = 1 = F(z, w).$$

2.5 Fonctions Harmoniques sur $\mathbf{Z}^2$

Soit $a : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}^+$ une fonction harmonique positive, c'est-à-dire que l'on a, pour tout $(i, j) \in \mathbf{Z}^2$, $a(i, j) \geq 0$ et

$$4a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}.$$

On se propose de montrer que a est constante. Soit $(z, w) \in (\mathbf{Z}^2)^2$.

a) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$: $a(z) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^2} p_n(z, y) a(y)$.

b) Prouver que pour tout $w \in \mathbf{Z}^2$: $a(z) \geq a(w) \sum_{k=1}^{n} q_k(z, w)$ et conclure.

3 Marche Transiente

On suppose enfin $d = 3$, Les U_k sont les vecteurs de la base canonique et leurs opposés.

i) Prouver que, pour tout $j, k, n \in \mathbb{N}$ avec $j + k \leq n$, $\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \leq \frac{n!}{[\frac{n}{3}]^3}$.

ii) Montrer que la probabilité de retour à l'origine après $2n$ étapes est

$$p_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sum_{j,k \geq 0; j+k \leq n} (\frac{1}{3^n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!})^2$$

c) Vérifier que la série $\sum p_n$ converge, en conclure que la probabilité de retour infini à l'origine est < 1.

Conséquence : si un Centralien rentre à la résidence après une soirée, il vaut mieux qu'il se souvienne de l'étage de sa chambre.